

CMTS 设备用户速率与容量

在共享式数据网中，用户在网上的实际运行速率如何合理认定；不同网络的速率差别怎样明析区分；单台 CMTS 数据前端可以带多少 Cable Modem，现今都是众说纷纭的议题。本文试图以新的理念进行简要分析。

一、分析用户速率的几个相关前提

1、数据前端所提供的下行速率 S

现今一台 8 MHz 带宽工作的 CMTS，在 256QAM 状态可提供的最高速率为 56.6Mbps，在 64QAM 状态可提供的最高速率 41.7Mbps。若系统安装了 w 台 CMTS，则 S 为上述数值的 w 倍。

由于下行为速率共享，不管是“CATV 数据网”还是“以太网”，其前端的下行速率始终是网络的速率瓶颈。而用户端的 Cable Modem，其上行是速率独享，每个用户一般可达 1Mbps 以上，这对普通用户在使用中已绰绰有余，不存在供求矛盾的问题。

2、用户所需最低速率范围

对一般网上（Internet）业务，下行速率达 250kbps 即无滞后感。

对 VOD 点播用户，据现今节目源的情况，当速率 >450Kbps，即可观看到 SVCD 效果的视频节目。显然共享式数据网至少应确保给网上用户提供 500kbps 范围以下的下行速率。

3、“业务指数” y

业务指数 y，是指用户在网上开展业务时，其下行（载）工作时间占业务全部工作时间的比例。例如：

对打字高手用“文字聊天”，其 $y \leq 0.1$ ；

对“网页浏览”用户，其 $y \leq 0.25$ ；

对网上“语音聊天”用户，其 $y \approx 0.5$ ；

对“VOD 点播”、“网络电视”用户，其 $y \approx 1$ ；等等。

y 的取值在 0~1 之间，从原则上说 y 不可能为 1，因即使是“VOD 点播”、“网络电视”也存在选择节目阶段的下载停歇时间。

4、“业务概率” P(y)

若“在线用户数”为 n，其中有 n_y 数量的用户在从事“业务指数”为 y 的业务，则比值 n_y/n 称为 y 业务的“业务概率”，即 $P(y) = n_y/n$ 。

在实际工作中，因网上用户对业务类别存在多方面的需求，至使“业务概率” P(y) 随 y 在 0~1 之间呈现复杂的随机性。当 $P(y) = 0$ ，即意味着无该项业务用户；当 $P(y) = 1$ ，即意味着网上所有用户都在从事同一种业务。但 $P(y) = 0$ 、 $P(y) = 1$ 只有概念上的意义，因前者无实质内容，后者在实际中不可能发生。经统计表明，P(y) 在网上的实际最大取值一般都在 0.1 以下，P(y) 的分布在原则上是遵循概率论中的“正态分布”规律。按“业务概率”

的定义，显然在系统中存在关系
$$\sum_0^1 p(y_i) = 1 \quad (1)$$

二、速率共享应遵循的原则

在共享式数据网中，用户对前端速率在共享中须遵循以下两个原则：

1、均分原则

即前端提供的速率由当时在网上从事下行工作的用户均分，不同“业务指数”的用户，

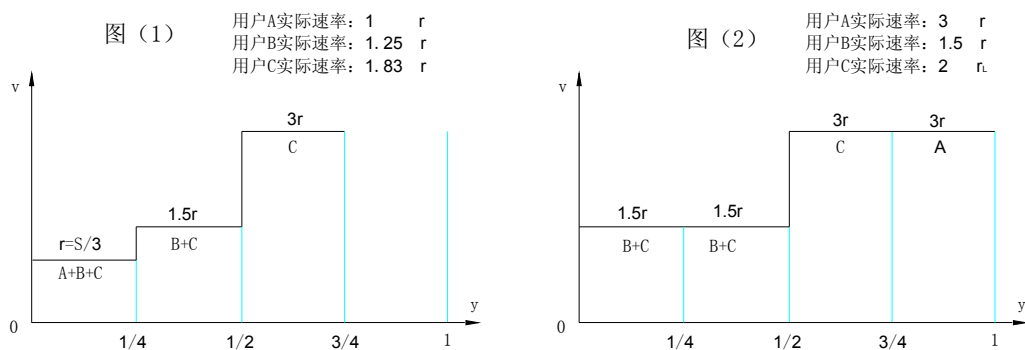
只表明在网上下载时间占总工作时间的比例不同，其下载速率与同时在网上下载的其它用户无异。“均分原则”为我们提供了只要能得知网上从事下载工作的实际用户数量，即可求出当时各用户的下载速率。

2、随机原则

虽然在一定时段内，网上的在线用户为固定数值 n 。但这些在线用户各自的“业务指数”是多少？网上用户的“业务概率” $P(y)$ 如何分布？各用户参与下载是否同步进行等问题上均呈随机性，至使用户在网上的实际瞬时速率在一般条件下不可能确切得知。

为了更形象地表述上述观点，现设网络系统中仅有 A、B、C，3 种工作类型，共 3 个 Modem 用户。其“业务指数”分别为 $y_A=1/4$ 、 $y_B=1/2$ 、 $y_C=3/4$ 。其各户的“业务概率” $P(y)$ 分别为 $P(y_A)=0.3$ 、 $P(y_B)=0.4$ 、 $P(y_C)=0.3$ 。由前述概念，若各用户都同时进入系统下载，则系统有最低速率 $r = S/n = S/3$ 。若各户在不同时间进入，则各户将有不同的实际速率。现以图 (1)、图 (2) 加以说明：

3 用户系统不同时间进入的速率分布图



注：

- 1、用户A: $y_A=1/4$ $P(y_A)=0.3$
 用户B: $y_B=1/2$ $P(y_B)=0.4$
 用户C: $y_C=3/4$ $P(y_C)=0.3$

- 2、用户C的速率为速率容量之和除各段时间之和，

例图 (1) 中用户C的实际速率为 $(r/4+r/4+r/4)/(3/4)=1.83r$

在图 (1) 中 A、B、C 同时进入，经 $1/4$ 时间段 A 类用户工作完成后，B、C 的速率上升为 $1.5r$ ，再等 $1/4$ 时间段 B 类用户工作完成后，C 的速率上升为 $3r$ ，各户的速率如图中的折线所示。A、B、C 的平均速率分别为： $1 r$ 、 $1.25 r$ 、 $1.83 r$ 。

在图 (2) 中 B、C 先进入，经 $1/2$ 时间段 B 工作完成后，C 的速率上升为 $3r$ ，在 C 完成后 A 才进入。各户的速率如图中的折线所示。A、B、C 的平均速率分别为： $3 r$ 、 $1.5 r$ 、 $2 r$ 。实际工作中 A、B、C 相互含接进行交叉下载的可能性极低，在此仅作分析特例。

由图 (1)、(2) 我们至少可得出以下结论：

a. 即使在其它数据都不变的条件下，只因用户进入时间的不同，也会引起各用户的速率在一定范围内变化。其最低速率为 r ，最高速率为 S （仅 1 户下载）。

b. 因用户进入下行工作时间的起点不同，所引发的系统用户速率上的随机波动，会改变各用户下载容量的分配比例。这也是网上即使是重复性地下载同一文件，所需时间也不可能相同的原因。

三、网上用户运行速率分析

1、网上用户速率分析的特点与难点

按共享原则，“用户运行速率” v_i 是指前端所提供的速率 S ，被当时网上的下载用户数 n_i 均分。

由前述分析可知，因网上存在“业务指数”多样性；用户下载进入时间的随机性等原因，网上实际下载用户数 n_i 总是处于随机变化状态。这种 v_i 的不确定性，是用户速率分析的困难之一。

其次是用户速率如何的界定。网上用户速率有成百上千之多，若以某类用户的实际速率来表示系统速率难免以偏概全；按传统，以全体用户速率的加权平均值来表示系统速率，又存在操作上的困难，因各用户的速率根本无法确定，平均值也就无从谈起；再说平均值本身也是一个变数，例图（1）、（2）中的平均值就各不相同，此设想也断难执行。

但在不同网络之间，用户工作速率有高有低是客观存在，如何能绕开网上速率的随机性，采用某种“特征参数”来表征网络间的这种速率差别；而这种“特征参数”，又必须与网上用户的实际运行速率具有密不可分的内在联系，这需要新的思路。

2、“折合户数”与“折合速率”

通过多方探索，对系统速率特征较为方便的表述方式，莫过于用“折合户数”和“折合速率”来表征。

所谓“折合户数”就是将各“业务指数” $y \neq 1$ 的各用户，折合成 $y=1$ 的各用户，再将折合后的各用户求和得出的总用户数。

所谓“折合速率”就是用“折合户数”对前端速率进行均分所得出的速率。“折合速率”的含意就是系统“折合户数”所对应的速率。

例图（1）中用户总数 $n=3$ ，对A类用户因其下载时间仅占网上时间的 $1/4$ ，即 $Y_A=0.25$ ，“业务概率” $P(y_A)=0.3$ 。当折合成 $y=1$ 的用户数为： $3 \times 0.25 \times 0.3 = 0.225$ 户。同理，对图中的B类用户，因 $Y_B = 1/2$ ， $P(y_B) = 0.4$ ，折合成 $Y=1$ 的“折合户数”即为 $3 \times 0.5 \times 0.4 = 0.6$ 户。图（1）中C类用户的“折合户数”为 $3 \times 0.3 \times 0.75 = 0.675$ 户。

图（1）、（2）中系统的“折合户数” $n_z = 0.225 + 0.6 + 0.675 = 1.5$ 户。相应的“折合速率” $v_z = S/1.5 = 2r$ ，式中 r 为系统最低速率，此处 $r = S/3$ 。在系统中采用最低速率 r 为相对速率单位，可使系统的速率表述较为方便。

“折合户数”和“折合速率”的出现，为分析和比较系统性能提供了一种方便的参量工具。因“折合速率”仅取决于网络的业务结构参数，与网上速率的随机性无关。后续的分析将要表明，“折合速率”在本质上就是系统用户的速率中心，各用户的实际速率始终围绕该速率作随机性波动。“折合速率”可以用来表示网络总体运行速率的高低，是网络之间带可比性的特征指标。

3、“折合速率”的计算

由于网上的“在线用户”数 n 在规划时为设计指标，是一确知常数。若已知用户在网上的“业务指数” y_i ，及其对应的“业务概率” $P(y_i)$ ，则从事 y_i 类业务的实际用户数可由 $n \cdot P(y_i)$ 得出。其对应的“折合户数”则为 $y_i \cdot n \cdot P(y_i)$ 。这时参与网上下载工作的总“折合户数”和系统的“折合速率”可由下面（2）、（3）式得出。

网上所有从事下载业务的“折合户数”为：

$$n_z(z) = n \sum_0^1 y_i \cdot p_i(y_i) \quad (2)$$

“折合户数”所对应的“折合速率”为：

$$V_z(z) = \frac{S}{n_z(z)} = S \Big/ n \cdot \sum_0^1 y_i \cdot p_i(y_i) \quad (3)$$

显然要求出“折合速率”和“折合户数”，须知道上式中的“业务指数” y_i 和对应的“业

务概率” $P(y_i)$ 的相关分布。

4、“业务指数” y 和“业务概率” $P(y)$ 的分布规律

在实际工作中，因网上业务类别的差异，使“业务概率”以 $y = 0.5$ 为中心，有如图（3）所示的三种类型分布。

1)、对称型

“业务概率” $P(y)$ 以 $y = 0.5$ 作对称分布，如图（3）A 所示。

因系统存在 $\sum P(y) = 1$ ，可以方便地证明系统存在 $\sum y \cdot P(y) = 0.5$ ，系统这时的“折合户数” $n \sum y \cdot P(y) = 0.5n$ ，对应的“折合速率” $v_z = S/0.5n = 2r$ 。 $r = S/n$ 为网上可能出现的最低速率。

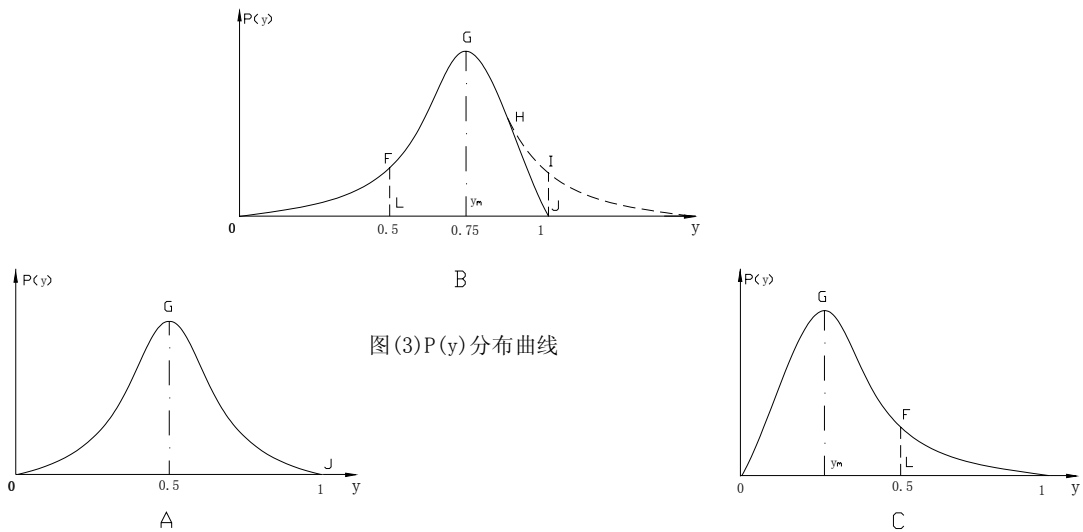
“对称型”从物理概念上反映的是长“业务指数”用户与短“业务指数”用户，在进入时间上达到理想交叉下载状态时，将有半数在线用户在从事下载工作。“折合速率” $2r$ 只是网上用户可能出现的一种速率，其网上用户的实际速率是在最低速率 r 和最高速率 S 之间。对称型的“业务概率”分布，完全遵循概率论中的“正态分布”规律。

2)、高偏型

“业务概率” $P(y)$ 以 $y = 0.5$ 作偏右分布，如图（3）B 所示。

这表明系统的长“业务指数”用户多于短“业务指数”用户，系统这时的“折合户数” $n \sum y \cdot P(y) > 0.5n$ 。对应的“折合速率”存在 $r < v_z < 2r$ 。

“高偏型”从物理概念上反映的是长“业务指数”用户多于短“业务指数”用户，用户在进入时间上出现理想交叉下载状态时，有半数以上的“在线用户”在从事下载工作。



3)、低偏型

“业务概率” $P(y)$ 以 $y = 0.5$ 作偏左分布，如图（3）C 所示。

这表明系统的长“业务指数”用户少于短“业务指数”用户，系统这时的“折合户数” $n \sum y \cdot P(y) < 0.5n$ 。对应的“折合速率” $v_z > 2r$ 。

“低偏型”从物理概念上反映的是长“业务指数”用户少于短“业务指数”用户，用户在进入时间上出现理想交叉下载状态时，有不到半数的“在线用户”在从事下载工作。对应的“折合速率”存在 $2r < v_z < kr$ 之间，其中： $k > 2$ 。

在实际工作中出现“对称型”和“低偏型”的可能性很小，其原因是：

- a、“文字聊天”等低 y 业务，已为“音像聊天”等高 y 业务所取代；
- b、以“音像聊天”、高清晰“网上互动游戏”、“高画质可视电话”、VOD 点播为代表的

音像传输业务，将会成为今后网上业务的热门话题。它们的“业务指数”都分布在 0.5~1 之间的高端区域。据相关资料预测，该区域内的传输业务，今后有可能会占据网上绝大多数（80%以上）份额。所以现今网络在运行中基本上都是工作在“高偏型”状态。

但需要说明的是 VOD 等 $y \approx 1$ 的业务，今后也不可能成为主流。因网上不可能所有用户都同时点播 VOD；再说随着高清晰数字电视的普及，也将会夺取 VOD 相当大一部分市场。至于“网络电视”因频道（节目）转换的时延大（>30s）、图像清晰度不够高，加之在网上还需另行收费，更不可能成为网上的主流用户。

5、“折合速率”的实质—网上速率中心

为了使表达更为简便，我们采用逻辑推理方式来阐述该问题。

1)、当 $P(y)$ 曲线如图 (3) B 以 $y=0.5$ 作右偏分布，则系统存在“折合户数” $n \sum y \cdot P(y) > 0.5n$ ，其“折合速率” v_z 为 $r \sim 2r$ 之间的某数值 $k_1 r$ ， k_1 的取值为 $2 > k_1 > 1$ 。如图 (4) A 所示。

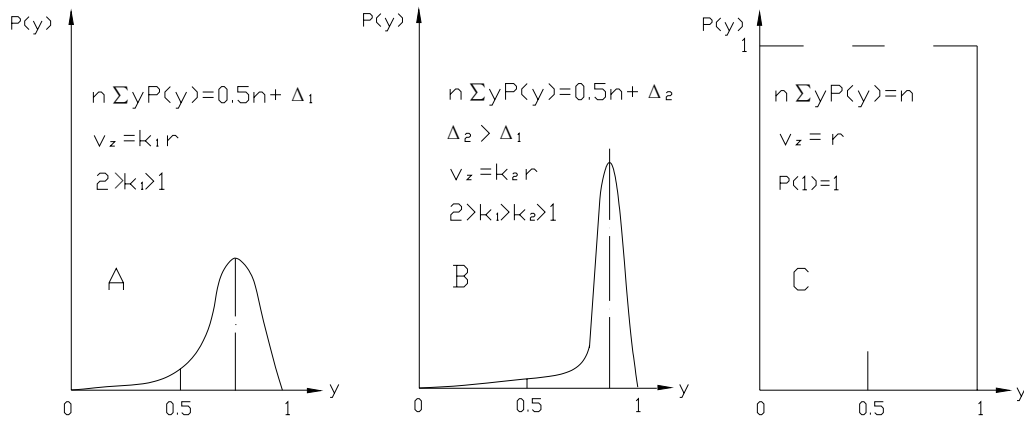


图 (4) 业务概率 $P(y)$ 演变图 A、B、C、

2)、当 $P(y)$ 曲线在图(4) A 的基础上继续作右偏分布，则“折合户数” $n \sum y \cdot P(y) > 0.5n$ 更加显著，“折合速率” v_z 也更加靠近最低速率 r ，为满足 $\sum P(y) = 1$ ，最终 $P(y)$ 曲线的主流区域（高端）被收缩成靠近 $y=1$ 处的脉冲式的狭窄曲线，如图(4) B 所示。

3)、当 $P(y)$ 曲线在图(4) B 的基础上继续作右偏分布，直到 $n \sum y \cdot P(y) = n$ ，有 $y = 1$ ， $P(y) = 1$ ，这时“折合速率” v_z 与网上其它用户的速率相重合都为 r ，如图(4) C 所示。

由于在 $v_z = r$ 之前，“折合速率” v_z 始终在 $r \sim 2r$ 之间，网上 $P(y)$ 曲线的主流用户速率只能集中在“折合速率” v_z 附近，从两侧向 v_z 收缩，直到“折合速率” v_z 与 r 合为一体。

我们从上述推论中至少可以得出如下结论：网上主流用户速率始终围绕“折合速率”运行，即“折合速率”始终是网上主流用户速率的中心。

6、“折合速率”的简化公式

在图 (3) B 所示的“高偏型”分布状态中，在 OFGH 线段， $P(y)$ 曲线与概率论中的“正态分布”相近。为了便于确定 $P(y)$ 取值，可将整个 $P(y)$ 曲线，视为偏心于 y_m 的“正态分布”曲线在 y 为 $0 \sim 1$ 区间所对应的曲线段；即用图 3 (B) 中的 OFGHIJ 线段替代 OFGHJ 曲线。 $P(y)$ 最大值所对应的 y_m 在 0.75 左右。

用图 3 (B) 中的 OFGHIJ 线段替代 $P(y)$ 曲线段后，所得出的“折合户数”会有所增大。但按“正态分布”曲线计算，其差额 $< 3\%$ ，在工程允许精度范围以内；此举因增大了系统速

率指标的设计储备，从使用角度上是有益无害。

在按图 3 (B) 对 $P(y)$ 取值时，需先对“正态分布密度函数数值表”的横坐标按 0.25 (0.75/3=0.25) 的比例进行压缩。再根据 0~1 之间所分成的 20~40 个 y_i 值，由“正态分布密度函数数值表”得出各纵标值 $p(y)$ ，及 $\sum p(y)$ 总值，为满足 (1) 式 $\sum_0^1 p(y) = 1$ 的条件，再用总值的倒数 $[\sum p(y)]^{-1}$ 为比例因子，压缩原有各纵坐标的取值，得出“业务概率”的各对应 $p_i(y_i)$ 值，再按 (2) 式即可得到系统“折合户数”：

$$n_z(y) = n \sum_0^1 y_i \cdot p_i(y_i) \approx 0.67n \quad (\text{户}) \quad (4)$$

系统“折合速率”为：

$$V_z(y) = \frac{S}{n_h(y)} = S \Big/ n \cdot \sum_0^1 y_i \cdot p_i(y_i) \approx 1.5 \frac{S}{n} = 1.5 r \quad (5)$$

若将 $S = 56.6\text{Mbps}$ ， $n = 226$ 户代入 (5) 式，可得网上最低速率 $r = 250\text{kbps}$ ，“折合速率” $V_z = 375 \text{kbps}$ 。显然 250kbps 是对 226 个用户都同时下载而言；375 kbps 是对 226 个用户的“业务概率” $P(y)$ 满足图 (3) B 而言。

在此应该说明的是：对 375 kbps 的“折合速率”速率，是“在线用户数” $n = 226$ 户条件下得出的，到下半夜因实际在线用户数远小于 226 户，这时系统的最低下行速率将远大于 250kbps，网上的运行速率将迅速飙升。这也是速率共享方式的独特优势。

7、网上“下行速率”的概率分布

有了以上基础，我们便可以从另一角度来观察网上用户《下行速率》的概率分布情况。

$$\text{考虑到图 (3) 中的“业务指数” } y = \frac{n_y}{n} = \frac{S/n}{S/n_y} = \frac{r}{v_y}$$

将 $y = r/v_y$ 代入图 (3) B 中的各对应值，可得图 (5) A。由该图可见：

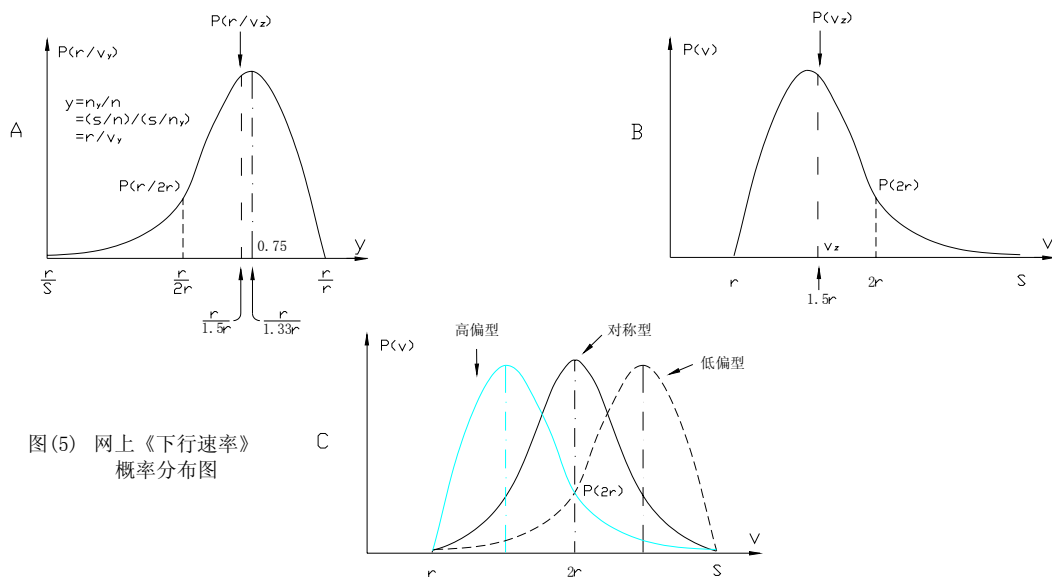
最低速率 r 的出现概率 $P(r/r) \approx 0$ ，

当速率 v_y 满足 $r/v_y = 0.75 = 1.33$ 时，对应的概率 $P(r/1.33r)$ 最高。

由 (5) 式，对折合速率有 $r/v_z = r/1.5r$ ，出现的概率 $P(r/1.5r)$ 靠近最高值 $P(r/1.33r)$ 左侧。

最高速率 S 的出现概率 $P(r/S) \approx 0$ 。

速率为 $2r$ 时，其概率 $P(r/2r)$ 在 $P(r/S) \sim P(r/1.5r)$ 之间。



图(5) 网上《下行速率》概率分布图

利用图(5) A中所表明的概率和速率的对应关系,可得到图(5) B所示的网上用户《下行速率》概率分布示意图。

在图(5)B中,“折合速率” v_z 的速率中心地位已显露无遗;因网上绝大多数“下行速率”都分布在以“折合速率”为中心的 $r\sim 2r$ 速率范围以内。仅少量“下行速率”有可能出现在 $2r$ 以上的区域。对“业务概率”按图(3) B分布的网络系统,通过计算网上用户的“下行速率”有近90%的可能性将工作在图(5) B中 $r\sim 2r$ 的速率范围内,而工作在 $2r$ 以上速率范围的可能性只有10%左右。

显然,绕开了网上速率随机性的“折合速率”,不仅可以作为网上“下行速率”的实质性代表,也是从网络结构上体现网络速率能力的特征指标。

仿“高偏型”的分析方法,通过对“低偏型”和“对称型”等网上业务分布类型进行类似处理,可得到图(5) C所示的网上各类业务“下行速率”概率分布示意图。由图可见“低偏型”对 $2r\sim S$ 之间的高速业务有较强的适应能力,而“对称型”在 $2r$ 附近的业务有较佳表现,但这两种业务分布由于本节第4款所表述的原因,在网上出现的可能性很低。

但“共享式数据网”通过图(5) C所表达出的多业务自适应能力,以及在任何时段都能使设备的速率潜力得到最佳发挥的事实,却是无可取代的独家优势;这也是“共享式数据网”不仅能大行其道,而且终将会取代现今广为流行的“独享式数据网”,成为独占鳌头的公众数据网的主要原因。

四、网上允许注册用户数量

1、在线用户数 n 和注册用户数 m

“同时在线并有下载的用户数” n ,是指在保障网速不低于规定值 r 的条件下,网络所能容纳的最大用户数。当CMTS的下行速率 S 和用户的最低速率 r 被确定后,同时在线并有下载的用户数 n 是一被确定的常数。例如:当 $S = 56.6\text{Mbps}$, $r = 250\text{kbps}$,则 $n = 226$ 户。

“注册用户数” m ,是指已在本网络缴费注册的用户数。由于注册用户不可能都尽数上网,所以在技术上系统总是允许存在 $m > n$ 。“同时在线并有下载的用户数”与“注册用户数”的比值 $q (n/m)$,称为“用户的上网概率”。 q 的取值因地区和时段呈现较大差异,一般情况下以节假日和前半夜为最高,大多在 $0.2\sim 0.8$ 之间。为保障用户的最低速率能 $\geq r$,原则上应按网络工作中可能出现的最大 q 值进行系统设计。

2、用户上网的“二项分布”特性

因网络中的每个已注册用户，并不是任何时间都一定在网上工作，总有一些用户因各种原因，处于不上网状态，用户何时需要上网是随机事件。通过大规模统计研究表明，用户上网的随机事件可以用概率论中的“二项分布”规律来进行表述。

我们设网络中有 m 个可能上网的注册用户；并将能保障下行速率 $>250\text{kbps}$ 的每个用户上网，都看成是一次随机事件 A ，并设定出现该随机事件 A 的概率为 q 。于是就可以将用户上网看成是在进行 m 次独立重复随机试验。我们的目标是通过对该试验过程的数学分析，得出在确保事件 A 正好出现 n 次的条件下所应有的 m 值。显然该 m 值即为系统允许的最大注册用户数。

根据概率论中“二项分布”的相关阐述，在 m 次独立重复随机试验中，随机事件 A 正好出现 n 次的概率为：

$$P_{m,q}(\zeta = n) = C_m^n q^n (1-q)^{m-n} \approx \frac{1}{\sqrt{mq(1-q)}} \varphi\left(\frac{n-mq}{\sqrt{mq(1-q)}}\right) \quad (6)$$

式中 $n = 1, 2, 3, \dots, m$ 。

显然 $P_{m,q}(\zeta = n)$ 与 m, q 息息相关。(6) 式中 $\varphi(x)$ 是正态分布密度函数，将 $\varphi(x)$ 进行积分运算可得对应的正态分布函数 $\Phi(x)$ 。

因在网络中存在注册用户数 $m \gg 1$ ，根据概率论中的“积分极限定理”，可将 (6) 式化简为：

$$P_{m,q}(0 \leq \zeta \leq n) \approx \Phi\left(\frac{n-mq}{\sqrt{mq(1-q)}}\right) - \Phi\left(\frac{0-mq}{\sqrt{mq(1-q)}}\right) = \Phi\left(\frac{n-mq}{\sqrt{mq(1-q)}}\right) \quad (7)$$

3、单台 CMTS 的注册用户数

我们的目的在于根据已知的 n 和 q 值，由 (7) 式求出所对应的注册用户数 m 。由于要使事件 A 在 $\zeta \leq n$ 的条件下一定成立，这时需使 (7) 式满足概率 $P_{m,q}(\zeta \leq n) = 1$ 。

当 (7) 式中 $\Phi\left(\frac{n-mq}{\sqrt{mq(1-q)}}\right) = \Phi(x) = 1$ 时，由正态分布函数 $\Phi(x)$ 的数值表，可得

对应的 $x \geq 3$ ，由此可得条件不等式：
$$\frac{n-mq}{\sqrt{mq(1-q)}} \geq 3 \quad (8)$$

将 $n = 226$ 户， $q = 0.5 \sim 1$ 代入 (8) 式，即可求出在不同 q 值下的允许注册用户数 m ，如表 I 所示。

表 I：单台 CMTS 在不同 q 值下的允许注册用户数

注册用户上网 概率 q	网上可保障下载速率 $\geq 250\text{kb/s}$ 的用户数		备 注
	同时在线并有下载的用户数 n	允许注册用户数 m	
0.2	226	945	CMTS 速率为： 56.6Mbps 用户速率为： 250~500kbps
0.3	226	638	
0.4	226	484	
0.5	226	392	
0.6	226	333	
0.7	226	290	

0.8	226	264	
0.9	226	237	
1	226	226	

由表 I 我们可以得出如下结论:

为满足用户能以 500 kbps 以下的下行速率工作,对单台以 56.6Mbps 速率工作的 CMTS,其注册用户数在 800 户以内,若有 10%的 VOD 用户,则应控制在 400 户为宜。